

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$. Ж: -1 .
5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{x^2-9}$. Ж: $\frac{1}{148}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2-5x+4} + \frac{x-4}{3(x^2-3x+2)} \right)$. Ж: 0 .
7. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2} \right)$. Ж: ∞ .

6-§. Биринчи ва иккинчи ажойиб лимитлар

Кўпгина лимитларни топишда қуйидаги маълум формулалардан фойдаланилади:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \text{ — биринчи ажойиб лимит; } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \text{ — иккинчи ажойиб лимит.}$$

Мисоллар ечганда қуйидаги тенгликларни назарда тутиш фойдали:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + k\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k; \quad \text{✓}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \text{✓}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \quad \text{✓}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (a > 0). \quad \text{✓}$$

1-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

Ечиш. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Биринчи ажойиб лимитдан фойдаланамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3.$$

2-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$$

Ечиш. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. $\frac{\pi}{2} - x = z$ бел-
гилаш киритсак, у ҳолда $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ да $z \rightarrow 0$ бўлади. Ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\pi - 2x} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - z)}{\pi - 2(\frac{\pi}{2} - z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\pi - \pi + 2z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{4x-1}.$$

Ечиш. Қасрнинг суратини махражига бўлиб, бутун қисмини ажратиб оламиз:

$$\frac{2x+1}{2x-3} = \frac{(2x-3)+4}{2x-3} = 1 + \frac{4}{2x-3}.$$

Шундай қилиб, $x \rightarrow \infty$ да берилган функция асоси бирга интилувчи, кўрсаткичи эса чексизликка интилувчи даражани ифодалайди, яъни 1^∞ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Функцияни иккинчи ажойиб лимитдан фойдаланиш мумкин бўладиган қилиб ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{4x-1} &= \left(1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{4x-1} = \left[\left(1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{\frac{2x-3}{4}} \right]^{\frac{4(4x-1)}{2x-3}} = \\ &= \left[\left(1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{\frac{2x-3}{4}} \right]^{\frac{4(4-\frac{1}{x})}{2-\frac{3}{x}}}.\end{aligned}$$

$x \rightarrow \infty$ да $\frac{4}{2x-3} \rightarrow 0$ бўлгани сабабли иккинчи ажойиб лимитга кўра:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{\frac{2x-3}{4}} = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(4-\frac{1}{x})}{2-\frac{3}{x}} = 8 \text{ эканини ҳисобга олиб, узил-кесил}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{4x-1} = e^8 \text{ эканини топамиз.}$$

Лимитларни ҳисобланг:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \cdot \sin 5x}. \quad \text{Ж: } \frac{18}{5}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{3x}. \quad \text{Ж: } \frac{1}{3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}. \quad \text{Ж: } -\frac{3}{2}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{4}{x-1}}. \quad \text{Ж: } e^{-8}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}. \quad \text{Ж: } e^{-\frac{2}{3}}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{\sin 2x}. \quad \text{Ж: } \frac{3}{2} \ln 2.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{3x}. \quad \text{Ж: } \frac{4}{3}.$$

6- мустақил иш

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}. \quad \text{Ж: } \frac{3}{5}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2}. \quad \text{Ж: } \frac{1}{2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x}. \quad \text{Ж: } \frac{1}{e}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) (\ln(3x+1) - \ln(3x-2)). \quad \text{Ж: } 2.$$

7-§. Эквивалент чексиз кичик функциялар ва улар ёрдамида лимитларни ҳисоблаш

Агар $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ $x \rightarrow x_0$ ҳолда чексиз кичик функциялар бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

бўлса, у ҳолда улар эквивалент дейилади ва $x \rightarrow x_0$ да $\alpha(x) \sim \beta(x)$ каби белгиланади. Масалан, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, шу сабабли $x \rightarrow 0$ да $\sin x \sim x$.

Шунга ўхшаш $x \rightarrow 0$ да қуйидаги чексиз кичик функциялар эквивалентдир:

$$\arcsin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x \sim x,$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad (1+x)^m - 1 \sim mx \text{ ва } x. \text{ к.}$$

Иккита чексиз кичик функциялар нисбатининг лимити уларга эквивалент чексиз кичик функциялар нисбатининг лимитига тенг, яъни агар $x \rightarrow x_0$ да $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ ва $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

1-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}.$$

Ечиш. Ушбу $1 - \cos 4x \sim 8x^2$, $\operatorname{tg}^2 3x \sim 9x^2$ эквивалент чексиз кичик функциялардан фойдалансак:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{9x^2} = \frac{8}{9}.$$

2-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+5x} - 2}.$$

Ечиш. Қасрнинг сурат ва махражини 2 га бўлиб, сўнгра уларни эквивалент чексиз кичик функциялар билан алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+5x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}x} - 1}{\sqrt[4]{1+\frac{5}{16}x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1+\frac{3}{8}x\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\left(1+\frac{5}{16}x\right)^{\frac{1}{4}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}x}{\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{16}x} = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

7-дарсхона топшириғи

Қуйидаги лимитларни эквивалент чексиз кичик функциялардан фойдаланиб ҳисобланг:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 4(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$. Ж: 4.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin 2x} - 1}{\sqrt{1+4x} - 1}$. Ж: $\ln 3$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\operatorname{tg} 5x}$. Ж: $\frac{3}{5}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1}$. Ж: $-\frac{2}{3 \ln 2}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-4x)}{\sin 8x}$. Ж: $-\frac{1}{2}$.

7- мустақил иш

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}. \quad \text{Ж: } 4.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}. \quad \text{Ж: } \frac{1}{4}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi(1 + \frac{x}{2}))}{\ln(x+1)}. \quad \text{Ж: } \frac{\pi}{2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2}. \quad \text{Ж: } \frac{1}{2 \ln^2 3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}. \quad \text{Ж: } -\frac{5}{3}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{\sin 7x - \sin 2x}. \quad \text{Ж: } \frac{1}{5} \ln \frac{8}{9}.$$

8- §. Чексиз кичик функцияларни таққослаш

$x \rightarrow x_0$ да $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ чексиз кичик функциялар бўлсин. Бу функцияларни таққослаш учун улар нисбатининг $x \rightarrow x_0$ даги limiti ҳисобланади:

а) Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ функция $\beta(x)$ га нисбатан *юқори тартибли чексиз кичик функция* дейилади ва $\alpha = o(\beta)$ каби белгиланади.

б) Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ функция $\beta(x)$ га нисбатан *қуйи тартибли чексиз кичик функция* дейилади. Равшанки бу ҳолда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$ ёки $\beta = o(\alpha)$.

в) Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ ва A чекли сон бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ *бир хил тартибли чексиз кичик функциялар* дейилади.

Хусусан, агар $A = 1$ бўлса, у ҳолда эквивалент чексиз кичик функцияларга эга бўламиз.

г) Агар $\alpha(x)^k$ ва $\beta(x)$ бир хил тартибли чексиз кичик функциялар бўлиб, $k > 0$ бўлса, у ҳолда $\beta(x)$ чексиз кичик функция $\alpha(x)$ га нисбатан k -тартибга эга дейилади.

Мисол. $x \rightarrow 0$ да $y = \sqrt{1 + x \sin x} - 1$ чексиз кичик функциянинг x га нисбатан тартибини аниқланг.

Ечиш. $\frac{y}{x^k}$ нисбатининг $x \rightarrow 0$ даги лимитини қараймиз ва k нинг бу лимит мавжуд ва нолдан фаркли бўладиган қийматини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + x \sin x} - 1)(\sqrt{1 + x \sin x} + 1)}{x^k \cdot (\sqrt{1 + x \sin x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - 1}{x^k (\sqrt{1 + x \sin x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^k (\sqrt{1 + x \sin x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{x^{k-2} (\sqrt{1 + x \sin x} + 1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^{2-k}, \text{ чунки} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + x \sin x} + 1) = 2. \end{aligned}$$

Равшанки $k=2$ да $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2-k} = 1$. Демак, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2}$. Шундай

килиб, y ва x^2 чексиз кичик микдорларнинг тартиби бир хил. Шу сабабли y микдор x чексиз кичик микдорга нисбатан *иккинчи тартибли* ($k=2$) чексиз кичик микдор бўлади.

8- дарсхона топшириғи

1. $x \rightarrow 0$ да $\alpha = x \sin^2 x$ ва $\beta = 2x \sin x$ чексиз кичик функцияларни таккосланг. Ж: $\alpha = o(\beta)$.

2. $x \rightarrow 0$ да $\alpha = x \ln(1+x)$ ва $\beta = x \sin x$ чексиз кичик функцияларни таккосланг. Ж: $\alpha \sim \beta$.

3. $x \rightarrow 1$ да $\alpha = 1-x$ ва $\beta = 1 - \sqrt[3]{x}$ чексиз кичик функцияларнинг бир хил тартибли бўлишига ишонч ҳосил қилинг. Булар эквивалент бўладими?

4. $x \rightarrow 0$ да чексиз кичик бўлган $y = \frac{7x^{10}}{x^3+1}$ нинг x га нисбатан тартибини аниқланг. Ж: $k=10$.

8- мустақил иш

1. $x=0$ да $\alpha = x^2 \sin^2 x$ ва $\beta = x \cdot \operatorname{tg} x$ чексиз кичик функцияларни таккосланг. Ж: $\alpha = o(\beta)$.

2. $x=0$ да $\alpha = a^x - 1$ ва $\beta = x \ln a$ чексиз кичик функцияларни таккосланг. Ж: $\alpha \sim \beta$.

3. $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ да $\alpha = \sec x - \operatorname{tg} x$ ва $\beta = \pi - 2x$ функциялар бир хил тартибли чексиз кичик бўлишига ишонч ҳосил қилинг. Улар эквивалент бўладими?

4. а) $y = \sqrt{1+x^3} - 1$ ва б) $y = 1 - \cos x$ чексиз кичик функцияларнинг x чексиз кичикка нисбатининг тартибини аниқланг. Ж: а) $k=3$; б) $k=2$.

9- §. Функциянинг узлуксизлиги.

Функциянинг узлиш нуқталари ва уларнинг турлари.

Функциянинг ноли

2.9.1. Агар x_0 ва унинг атрофида аниқланган $y=f(x)$ функция шу нуқтада чекли лимитга эга бўлиб, бу лимит функциянинг x_0 нуқтадаги қийматига тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

бўлса, у ҳолда бу функция x_0 нуқтада *узлуксиз* дейилади.